Analysis I

Prof. Mertins

WS 1994/95

Wilko Hein

Kapitel I. Die reellen Zahlen

§1 .... Körperaxiome

A1: Kommutativität $a+b=b+a$
A2: Assoziativität $(a+b)+c = a+(b+c)$
A3: Ex. d. Null $a+0=a$
A4: Ex. d. Inversen $a+(-a)=0$

=> R bzgl. Addition kommutative Gruppe

A5: Kommutativität $a\cdot b=b\cdot a$
A6: Assoziativität $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
A7: Ex. d. Eins $a\cdot 1=a$
A8: Ex. d. Inversen $a\cdot a^{-1}=1$

=> R\{0} bzgl. Multiplikation kommutative Gruppe

A9: Distributivität $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

1.1 .... Sätze und Definitionen
0, Inverses eind. bestimmt, $-0=0$, $a+x=b$ genau eine Lsg., dadurch Differenz definieren.

1.2 .... Sätze und Definitionen
1, Inverses eind. bestimmt, $1^{-1}=1$, $a\cdot x=b$ genau eine Lsg., dadurch Quotienten definieren

1.3 .... Satz

1.4 .... Satz

1.5 .... Bemerkung
Menge K mit Verknüpfungen heißt Körper, wenn (A1)-(A9) gelten mit K anstelle von R.

1.6 .... Beispiele
Q Körper
Z kein Körper
$K_2=\{0,1\}$, +: mod 2, · wie gewohnt, ist kleinster Körper

§2 .... Anordnungsaxiome

A10: Trichotonomie $a<b$, $a=b$, $a>b$
A11: Transitivität $a<b$, $b<c$ => $a<c$
A12: Monotoniegesetz $a<b$ => $a+c < b+c$, $a\cdot|c| < b\cdot|c|$

2.1 .... Definition
Größer, Kleiner gleich, Größer gleich

2.2 .... Satz
Rechenregeln in Ungleichungen

2.3 .... Satz
Gleichgesinnte Ungleichungen addierbar, aber nicht subtrahier- oder multiplizierbar!

2.4 .... Satz
Rechenregeln

2.5 .... Satz
Rechenregeln Division

2.6 .... Bemerkung
Körper K, in dem Anordnung mit (A10)-(A12) gegeben, heißt *angeordneter Körper*.
R, Q angeordnet, K_2 nicht angeordnet

2.7 .... Satz „Ungleichung des Arithmetischen Mittels“
$a < (a+b)/2 < b$. Zwischen zwei reellen Zahlen stets eine dritte.

2.8 .... Folgerung

Gilt für alle positiven ε $0 \le a < \varepsilon$, so ist $a=0$. Beweis: Gegenannahme, Arithmetisches Mittel

2.9 .... Definition

$|a|$

2.10 .... Satz

$|-a|=|a|$, $a \le |a|$, $-a \le |a|$, $-|a| \le a \le |a|$

2.11 .... Satz

B1: Definitheit $0 \le |a|$, $|a|=0 \iff a=0$

B2: Multiplikativität $|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$

B3: Dreiecksungleichung $|a+b| \le |a| + |b|$

2.12 .... Satz

$|a/b| = |a| / |b|$, falls $b \neq 0$.

$\big|\, |a|-|b| \,\big| \le |a-b|$, $|a+b| \le |a|+|b|$

Beweis: (1) $|1/b|=1/|b|$ Spezialfall. (2) $a=(a-b)+b \Rightarrow |a| \le |a-b|+|a| \Rightarrow \big|\, |a|-|b| \,\big| \le |\, a-b|$

2.13 .... Definition

Intervall

§3 .... Vollständigkeitsaxiom

3.1 .... Definition

$M \subset R$, $M \neq \emptyset$. M *nach oben beschränkt*, wenn ex. $b \in R$ mit $x \le b$ $\forall$ $x \in M$. b *obere Schranke*

$M \subset R$, $M \neq \emptyset$. M *nach unten beschränkt*, wenn ex. $a \in R$ mit $a \le x$ $\forall$ $x \in M$. a *untere Schranke*

M *beschränkt*, wenn M nach oben und nach unten beschränkt.

Supremum sup M: kleinste obere Schranke b_0 , wenn $b_0 \le b$ für jede obere Schranke b

Infimum inf M.

Supremum bzw. Infimum einer nach oben bzw. unten beschränkten Menge eindeutig bestimmt.

sup M und inf M nicht notwendig in M. $\sup M \in M \Rightarrow \sup M = \max M$

3.2 .... Beispiele

.... Das Vollständigkeitsaxiom

A13: Vollständigkeit. Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke

Durch (A1)-(A13) wird R bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert.

3.3 .... Satz

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine größte untere Schranke.

Beweis: Spiegelung an 0.

3.4 .... Satz

b_0 Supremum von M $\iff$ $x \le b$ und $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in M$ mit $b_0 - \varepsilon < x$ (x zwischen $b-\varepsilon$ und b_0)

Beweis: =>: klar. Indirekt, $b-\varepsilon$ neue obere Schranke

<=: klar. Indirekt: b auch sup, $b < b_0$

3.5 .... Satz

Analogon für Infimum

3.6 .... **Satz**
$\forall$ a≥0 $\exists$ genau ein x≥0 mit x^2=a.
M:={ y^2≤ a, y≥0 }. M nicht leer, da 0^2=0≤ a.
M nach oben beschränkt => $\exists$ x := sup M. Es ist 0 ≤ x, da 0 $\in$ M.
z.Z.: Dieses x erfüllt Gleichung

3.7 .... **Beispiel**
In Q gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht. M:={y | y^2 ≤ 2, 0 ≤ y }
Beweis: Indirekt: Ann. x = m/n = sup M. m, n teilerfremd. => x^2=m^2/n^2=2 => m^2=2n^2 => m^2 gerade => m gerade => m=2p => m^2=4p^2=2n^2 => 2p^2=n^2 => n2 gerade => n gerade. => 2 teilt m und n => Widerspruch!

.... **Bemerkung**
Zwischen zwei rationalen Zahlen beliebig viele irrationale.
c_k := a + (b-a)/(k·√2). a < c_k < b. c_k ∉Q, sonst √2=(b-a)/k(c_k-a) ∈ Q

3.8 .... **Satz**
M ⊂ N ⊂ R. => sup M ≤ sup N bzw. inf N ≤ inf M

3.9 .... **Satz**
sup(A+B) = sup(A) + sup(B)
sup(rA) = r sup A

§4 .... Vollständige Induktion

4.1 .... **Satz des Archimedes**
N nicht nach oben beschränkt, d.h. zu jeder reellen Zahl $\exists$ eine größere, natürliche Zahl.
Beweis: Indirekt: N nach oben beschränkt => $\exists$ sup => $\exists$ n mit b_0 -1 < n => b_0 < n+1 ∈ N

4.2 .... **Satz des Eudoxos**
Zu a, b ∈ R^+ $\exists$ m ∈ N mit m·a>b. Beweis: Indirekt: m·a ≤ b $\forall$ m => m ≤ b/a obere Schranke.
Zu ε>0 $\exists$ m ∈ N mit 1/m < ε. Dann auch 1/n < ε $\forall$ n>m. Bew: Ind, b:=1: m·a ≤ 1 => m ≤ 1/a

4.3 .... **Beweis durch Vollständige Induktion**

4.4 .... **Beispiel**
1+2+3+...+n = n(n+1)/2

4.5 .... **Definition (Rekursiv)**
Endliche Summe, Endliches Produkt

4.6 .... **Regeln für Summenzeichen**
Indexverschiebung, Allgemeines Distributivitätsgesetz, Verallgemeinerte Dreiecksungleichung

4.7 .... **Rechengesetze für Potenzen**

4.8 .... **Bernoullische Ungleichung**
x> -1, n∈N. $(1+x)^n$ ≥ 1+nx

4.9 .... **Definition**
Binominalkoeffizienten: (a 0):=1, (a k+1):= (a k) (a-k)/(k+1)
(a k) = a! / ((a-k)! k!)

4.10 .... **Hilfssatz**
(a k-1) + (a k) = (a+1 k)

4.11 .... **Binomischer Lehrsatz**
$(a+n)^n$ = Σ (n k) $a^{n-k}b^k$

4.12 .... **Satz und Definition**
Genau eine Lösung von x^n=a

4.13 .... **Definition**

Potenzen mit rationalem Exponenten

4.14 .... **Potenzregeln**

4.15 .... **Satz**

„Q liegt dicht in R“: $a, b \in R$. => $\exists\, r \in Q$ mit $a < r < b$

$a < m/n < b$ <=> $na < m < nb$. $b-a > 0$ => Eudoxos => $\exists\, n$ mit $n(b-a)=nb-na > 1$

=> $\exists\, m$ nach Vorgabe, anschaulich klar, da Differenz $nb-na > 1$.

Kapitel II. Funktionen

§5 .... Der Funktionenbegriff

5.1 .... **Definition**
Abbildung, Definitionsbereich, Abbildungsvorschrift, Wertebereich, Gleichheit

5.2 .... **Beispiele**
DIRICHLETsche Funktion (1 auf Q, 0 sonst)

5.3 .... **Definition**
Bildmenge, Urbildmenge

5.4 .... **Definition**
Geordnetes Paar, Kartesisches Produkt, Graph = { (x,f(x)) }

5.5 .... **Definition**

Injektiv	$s \neq t \Rightarrow f(s) \neq f(t)$
Surjektiv	$f(X)=Y$
Bijektiv	Injektiv & Surjektiv

5.6 .... **Beispiele**

5.7 .... **Definition**
Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion, Inverse Funktion

5.8 .... **Beispiel**

5.9 .... **Definition**
Einschränkung & Fortsetzung einer Funktion

5.10 .... **Definition**
Kompositum „g nach f", g o f

5.11 .... **Definition**
Beschränktheit von f(X). sup f(x) über alle x aus X := sup f(X)

5.12 .... **Definition**
[Streng] [monoton] [wachsend / fallend]

5.13 .... **Bemerkungen**
Konstante Funktion ist monoton.
Streng monotone Funktion ist injektiv, Umkehrfunktion ebenfalls streng monoton

5.14 .... **Definition**
Folge in Y

5.15 .... **Definition**
$f+g$, $f \cdot g$, af punktweise erklärt.
$|f|(x) := |f(x)|$, $f^+(x) = \{ f(x)$, falls $f(x)>0$; 0, falls $f(x)<0) \}$, $f^-(x)$.
$\Rightarrow f = f^+ - f^-$, $|f|=f^+ + f^-$, $f^+= (|f| + f)/2$, $f^-=(|f|-f)/2$
$(\max(f,g))(x) := \max(f(x), g(x))$

§6 .... Polynome

6.1 .... **Definition**
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ heißt Polynom.
Nullstelle, Grad des Polynoms, Abdividieren von Linearfaktoren

6.2 .... **Satz**
Polynom vom Grad n > 0 höchstens n verschiedene Nullstellen

6.3 .... **Satz „Identitätssatz für Polynome"**
Stimmen Polynome vom Grad n an n+1 verschiedenen Stellen überein, so sind sie identisch.

6.4 .... **Folgerung**

Normalform eines Polynoms, Grad eindeutig bestimmt.
Bei Linearfaktorzerlegung Vielfachheiten υ_k eindeutig bestimmt.
Koeffizientenvergleich möglich.

6.5 .... **Satz**

Polynom unbeschränkt, für große x das Vorzeichen durch a_n bestimmt,
Nullstellen im Intervall $(-2(|a_0|+...+|a_n|)/|a_n|,\ 2(|a_0|+...+|a_n|)/|a_n|)$

Kapitel III. Grenzwerte von Zahlenfolgen

§7 .... Grenzwertbegriff

7.1 .... Definition

Folge $(a_n)_{n\in N}$ konvergent gegen a <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$, $|a_n-a|<e\ \forall\ n \geq n_0$
In jeder U_ε liegen fast alle Folgenglieder (bis auf endlich viele Ausnahmen)
Beispiele: lim 1/n = 0 (Eudoxos),
$\sqrt[n]{n}$ --> 1, (Beweis: Abschätzen nach unten durch 1, Neue Folge $x_n:=\sqrt[n]{n}$ -1. Nach n auflösen, Binominal-Koeffs von k=0 und k=2, => $x_n^2 \leq 2/n$

7.2 .... Satz

Konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert
Beweis: Indirekt, a, b Grenzwerte, $\varepsilon:=|a-b|/2$, U_ε bilden, Schnitt leer.

7.3 .... Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt
Beweis: n_0 bestimmen, davor nur endlich viele. Maximum.

.... Beispiel

Folge der Partialsummen der Reihe 1/k. Divergent, vgl. 9.9

7.4 .... Bemerkungen

$|a_n-a|<\varepsilon$ und $n \geq n_0$ auch möglich!
Nicht-Konvergenz: „Ausnahme-Umgebung“ U_ε: $\forall\ n_0\ \exists\ n > n_0$ mit $an \notin U_\varepsilon$

7.5 .... Definition

Teilfolge: Streng monoton wachsende Abbildung der Indizes

7.6 .... Beispiele

7.7 .... Satz

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen gleichen Grenzwert.

7.8 .... Satz

Jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen. Folge kann monoton wachsend/fallend gewählt werden.
Beweis: $\exists\ r_n$ mit $a + 1/(n+1) < r_n < a + 1/n$. (r_n) monoton fallend, $|r_n-a|<1/n$. => lim $r_n=a$

§8 .... Rechnen mit konvergenten Folgen

8.1 .... Satz

(a) $a_n \leq b_n$ => $a \leq b$. Beweis: Indirekt über ε-Umgebung
(b) $a_n \leq c_n \leq b_n$, lim a_n = lim b_n = a => lim c_n = a. **Einschnürungssatz**. Beweis: U_ε

8.2 .... Satz

(a) $|a_n-a| < \alpha_n$ Nullfolge => lim a_n = a
(b) lim a_n = a => lim $|a_n| = |a|$
(c) lim a_n = a, $|a_n| \leq \gamma$ => $|a| \leq \gamma$

8.3 .... Satz

Nullfolge · Beschränkte Folge = Nullfolge
Beweis: ε-Bedingung, $|a_n\, b_n| \leq \beta\, \varepsilon$

8.4 .... Satz

(a_n), (b_n) konvergente Folgen => $(a_n +- b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $(c\, a_n)$konvergent. (a_n / b_n), bei b, b_n !=0
Beweis: (1) ε-Bedingung. (2) $(a_n \cdot b_n\ -\ a\,b) = (a_n-a)b_n + (b_n-b)a$
(3) $\exists$ p mit $|b|/2 < |b_n|\ \ \forall\ n > p$ => $|\ 1/b_n - 1/b\ | = |\ (b-b_n) / b\cdot b_n\ | \leq 2/b^2\ |b_n - b|$. Konstante mal Nullfolge => $\lim(1/b_n)=1/b$. => $\lim(\ a_n \cdot 1/b_n\ ) = a/b$
Existenz aller Grenzwerte beachten!

§9 .... Vier Prinzipien der Konvergenztheorie

9.1 .... Monotonieprinzip

(a_n) sei monoton wachsend/fallend. (a_n) nach oben/unten beschränkt => Konv. $\lim a_n = \sup a_n$
Beweis: $a := \sup a_n \Rightarrow \exists\, n_0$ mit $a-\varepsilon < a_{n0} \Rightarrow a-\varepsilon < a_n \le a \;\; \forall\, n>n_0 \Rightarrow$ Beh.

9.2 .... Definition

Intervallschachtelung: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $\lim (b_n - a_n) = 0$

9.3 .... Prinzip der Intervallschachtelung

Genau ein a als Grenzintervall.
Beweis: Beschränkt durch a_1, b_1 => Konvergenz gegen a, b => $\lim(a_n-b_n)=a-b=0 \Rightarrow a=b$

9.4 .... Beispiel und Definition

$e = \lim (1 + 1/n)^n = \lim (1 + 1/n)^{n+1} = 2.71828$

9.5 .... Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge in R enthält konvergente Teilfolge
Beweis: z.Z.: Enthält momotone Teilfolge, dann Monotonieprinzip.
Gipfelstelle m: $a_n < a_m \;\; \forall\, n>m$
(a_n) hat unendlich viele Gipfelstellen => $m_1 < m_2 < \ldots$, => $a_{m1} > a_{m2} > \ldots$ => Beh.
(a_n) hat endlich viele Gipfelstellen => n_1 > max aller Gipfelstellen => n_1 keine Gipfelstelle =>
$\exists\, n_2 > n_1$ mit $a_{n1} \le a_{n2}$ => Induktion

9.6 .... Definition

Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge <=> $\forall\, \varepsilon>0 \;\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit $|a_m-a_n|<\varepsilon \;\forall\, m,n > n_0$
(Cauchy-Bed.)

9.7 .... Cauchysches Konvergenzkriterium

Folge in R konvergiert genau dann, wenn Cauchy-Folge.
=>: $|a_n-a| < \varepsilon/2 \Rightarrow |a_n-a_m| < |a_n-a| + |a_m-a| < \varepsilon$
<=: z.Z.: (a_n) beschränkt: $|a_m|-|a_n| \le |a_m-a_n| < \varepsilon := 1 \;\forall\, m,n > n_0 \Rightarrow |a_m| < 1 + |a_{n0}| \;\; \forall\, m > n_0$
$\Rightarrow |a_n| \le \max\{ |a_1|, \ldots, |a_{n0-1}|, 1+ |a_{n0}| \}$ => Bolzano-Weierstrass => (a_n) hat konvergente Teilfolge (a_{nk}), sei $a := \lim a_{nk}$.
z.Z. $\lim a_n = a$. $\exists\, n_0, N>n_0$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon/2 \;\; \forall\, m,n > n_0$, $|a_N - a| < \varepsilon/2$
$\Rightarrow |a_m - a| = |(a_m-a_N) + (a_N-a)| \le |a_m-a_N| + |a_N-a| < \varepsilon$

9.8 .... Bemerkung

Ohne Kenntnis des Grenzwertes sind mit 9.1 und 9.7 Konvergenzaussagen möglich!
Nicht-Konvergenz: Ausnahme-ε bei Cauchy

9.9 .... Beispiele

Reihe 1/k. $\varepsilon := 1/2$, $m := 2n$.
Reihe $(-1)^{k-1}\cdot 1/k$ konvergent. $a_{n+k} - a_n = (-1)^n\, [\, 1/(n+1) - 1/(n+2) + \ldots\,]$. Positive zusammenfassen => >0. Negative zusammenfassen => $<1/(n+1)$ => Beh.

Intermezzo ...... Allgemeine Potenz und Logarithmus

$r \in R$. $a^r := \lim a^{r_n}$, $r_n \in Q$, $\lim r_n = r$

§10 .... Häufungswerte von Folgen

10.1 .... Definition

Häufungswert: $\forall\, \varepsilon>0, n \;\; \exists\, m > n$ mit $a_m \in U_\varepsilon(a)$ [In jeder ε-Umgebung unendlich viele FG]

10.2 .... Beispiel

Grenzwert von Teilfolgen ist Häufungswert

10.3 .... Satz

Häufungswert <=> Grenzwert geeigneter Teilfolge

Beweis: =>: Indizes bestimmen mit $a_{nk} \in U_{1/k}(a)$ => $\lim a_{nk} = a$

10.4 .... Satz „Bolzano-Weierstrass“

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Beweis: Auswahlprinzip „Bolzano-Weierstrass“ und Satz 10.3

.... Beispiel

Cauchysches Diagonalverfahren

Q abzählbar, alle Werte aus R Häufungswerte

10.5 .... Satz und Definition

Beschränkte Folge besitzt größten und kleinsten Häufungswert, lim sup, lim inf. Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen liegen dazwischen. Bei lim inf: Links von $\alpha+\varepsilon$ unendlich viele, links von $\alpha-\varepsilon$ nur endlich viele Folgenglieder.

Beweis: (iii) Indirekt: Links unendlich viele => $\exists$ Teilfolge, beschränkt => Konvergent => HW

10.6 .... Satz

Folge konvergiert <=> beschränkt und besitzt nur einen Häufungswert

Beweis: lim inf = lim = lim sup

10.7 .... Satz

Beschränkte Folge. $\alpha_n := \inf \{ a_k \mid k \geq n \}$, $\beta_n := \sup \{ a_k \mid k \geq n \}$. Monoton, überschneiden sich nicht. (α_n) und (β_n) konvergieren, $\liminf a_n = \lim \alpha_n = \sup \alpha_n$.

Beweis: (iii) Monotonieprinzip => $\alpha = \lim \alpha_n = \sup \alpha_n$. $\alpha = \liminf a_n$ durch ε-Bedg. 10.5

10.8 .... Beispiel

$a_n := (-1)^n + 1/n$. $(\alpha_n) = (-1, -1, -1, ...) \to -1$, $(\beta_n) = (3/2, 3/2, 5/4, 5/4, 7/6, ...) \to 1$

§11 .... Bestimmte Divergenz

11.1 .... Definition

Folge [bestimmt] divergent gegen ∞, $-\infty$ <=> $\forall G \in R^+ \exists n_0$ mit $a_n > G$, $a_n < -G$ $\forall n>n_0$

11.2 .... Beispiele

11.3 .... Satz

(a) $\lim a_n = 0$ <=> $\lim 1/|a_n| = \infty$

(b) Kurz: $\infty + c = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\alpha \cdot \infty = \text{sign}(\alpha) \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\alpha / \infty = 0$

Unbestimmte Ausdrücke: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Beweis: (a) Nach $| a_n - 0 | < 1/G$

11.4 .... Definition

$\limsup a_n := \sup a_n := \infty$, falls (a_n) nicht nach oben beschränkt

Kapitel IV: Reihen

§12 .... Konvergente Reihen

12.1 .... Definition

$s_n := \Sigma_{k=0}^{n} a_k$ n-te Partialsumme

$(s_n)_{n\in N}$ (unendliche) Reihe mit der Gliederfolge (a_n), Bezeichnung: $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$

Reihe $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent <=> Folge der Partialsummen konvergent. lim s_n=:s Wert der Reihe

Schreibweise: $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k = s$ [Nur, wenn Reihe konvergent!]

.... Beispiele

Geometrische Reihe: $a_n := q^n$, $n\geq 0$. $s_n = \{ \Sigma_{k=0}^{n} q^k = (1-q^{n+1})/(1-q) \quad n+1$ (bei q=1) }

Konvergenz für $|q| < 1$: $\Sigma_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$. Divergenz für $|q| \geq 1$

Harmonische Reihe: $\Sigma_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergent

Teleskopsumme: $a_n:=1/n(n+1)=1/n - 1/(n+1)$. $\Sigma_{k=0}^{n} (1/k - 1/(k+1)) = 1 - 1/(n+1)$. $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_n=1$

12.2 .... Cauchysches Konvergenzkriterium

Reihe konvergent <=> $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_0=n_0(\varepsilon)$, $|\Sigma_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, p$

Beweis: <=> (s_n) Cauchy-Folge

12.3 .... Monotoniekriterium

Reihe mit nichtnegativen Gliedern konvergiert <=> Folge der Partialsummen beschränkt

.... Beispiel

$\Sigma_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konv. $\Sigma_{k=1}^{n} 1/k^2 \leq 1 + \Sigma_{k=2}^{n} 1/k(k-1) = 1 + \Sigma_{k=1}^{n-1} 1/k(k+1) = 1+1-1/n \to \pi^2/6 < 2$

12.4 .... Satz

$\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergente Reihe. $r_n := \Sigma_{k=n+1}^{\infty} a_k$ Reste der Reihe. => (a_n) und (r_n) Nullfolgen

Beweis: =>: Im Cauchy-Konvergenzkriterium p=1.

Existenz von r_n: Indexverschiebung. Hier Cauchy-Konvergenzkrit.

12.5 .... Satz

Konvergente Reihen gliedweise addierbar oder mit Konstante multiplizierbar.

12.6 .... Konvergenzkriterium von Dirichlet

$\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ Reihe mit beschränkten Partialsummen (Nicht notwenig konvergent!) und (b_n) monoton fallende Nullfolge. => $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ konvergent

Beweis: Zu umständlich!

12.7 .... Konvergenzsatz von Leibniz für alternierende Reihen

(b_n) monoton fallende Nullfolge. => $\Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$.

Gerade Glieder der Partialsummenfolge: Monoton fallend.

Ungerade Glieder: Monoton wachsend.

12.8 .... Klammersatz

In konvergenten Reihen Glieder klammerbar, ohne Konvergenzverhalten zu ändern.

Beweis: Folge der Partialsummen der neuen Reihe ist Teilfolge der alten.

§13 .... Absolut konvergente Reihen

13.1 .... Definition

$\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent <=> $\Sigma_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent

13.2 .... **Satz** **Ansage**

Absolut konvergente Reihe erst recht konvergent, es gilt verallgemeinerte Dreiecksungleichung

Beweis: CAUCHY-Krit.: $\Sigma_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \ \ \forall\, n>n_0$. => $|\Sigma_{k=n+1}^{n+p} a_k| \le \Sigma_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$ => CAUCHY

DU: $|\lim \Sigma_{k=0}^{n} a_k| \le \lim |\Sigma_{k=0}^{n} a_k| \le \lim \Sigma_{k=0}^{n} |a_k|$

13.3 .... **Satz**

Reihe absolut konvergent <=> Folge ($\Sigma_{k=0}^{n} |a_k|$) beschränkt

Beweis: Monotonieprinzip

13.4 .... **Majoranten-Minoranten-Kriterium**

$|a_k| \le c_k$ f.ü. mit Σc_k konvergent => Σa_k absolut konvergent. Konvergente Majorante

$0 \le d_k \le a_k$ f.ü. mit Σd_k divergent => Σa_k divergent Divergente Minorante

Beweis: (i) Sei $|a_k| \le c_k \ \forall\, k \ge n_1$. => $\Sigma_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \le \Sigma_{k=n+1}^{n+p} c_k \le \Sigma_{k=n+1}^{\infty} c_k \to 0 \ \ \forall\, n \ge n1, p$

(ii) folgt aus (i): Wäre Σa_k konvergent, so auch Σd_k

.... **Beispiele**

$\Sigma 1/k^p$, $p \ge 2$ konvergent, $\Sigma 1/k^2$ konvergente Majorante

$\Sigma 1/\sqrt{k}$ divergent, $\Sigma 1/k$ divergente Minorante

13.5 .... **Wurzelkriterium** **Ansage**

Σa_n Reihe, $\beta := \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

$\beta < 1$ => Absolute Konvergenz

$\beta > 1$ => Divergenz

$\beta = 1$ => Keine Information

Beweis: $\beta < 1$. Wähle ε mit $\beta + \varepsilon < 1$. => $|a_n|^{1/n} > \beta + \varepsilon$ nur für endlich viele n, „<“ $\forall\, n > n_1$

=> $|a_n| \le (\beta+\varepsilon)^n$ => geometrische Reihe majorisiert => Absolute Konvergenz.

$\beta > 1$. ε mit $\beta-\varepsilon>1$. => $|a_n|>(\beta-\varepsilon)^n>1$ => (a_n) keine Nullfolge => Divergenz

$\beta = 1$. Gegenbeispiele: $\Sigma 1/n$ divergent, $\Sigma 1/n^2$ konvergent

13.6 .... **Quotientenkriterium**

Σan mit $a_n \ne 0 \ \forall\, n$.

$\lim\sup |a_{n+1} / a_n| < 1$ => Absolute Konvergenz

$\lim\inf |a_{n+1} / a_n| > 1$ => Divergenz

$\lim\inf |a_{n+1} / a_n| \le 1 \le \lim\sup |a_{n+1} / a_n|$ => Keine Aussage

Beweis: $\beta := \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$ => $\lim\inf |a_{n+1} / a_n| \le \beta \le \lim\sup |a_{n+1} / a_n|$, dann Wurzelkrit.

Ungleichung: Große Übung 23.

13.7 .... **Bemerkungen**

Wurzelkriterium leistungsfähiger als Quotientenkriterium.

13.8 .... **Beispiele**

$e = \Sigma_{k=0}^{\infty} 1/k! = \lim (1 + 1/n)^n$

13.9 .... **Bemerkungen zum Wurzel- und Quotientenkriterium**

(a) $\exists\, 0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1 \ \ \forall\, n>n_0$ => Absolute Konvergenz. Σq^n konvergente Majorante

(b) $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \ \ \forall\, n>n_0$ => Divergenz, denn (a_n) keine Nullfolge

(c) $0 < q < 1$, $|a_{n+1} / a_n| < q \ \ \forall\, n>n_0$ => Absolute Konvergenz

(d) $|a_{n+1} / a_n| \ge 1 \ \ \forall\, n>n_0$ => Divergenz, denn (a_n) keine Nullfolge, $(|a_n|)$ monoton wachsend ab bestimmter Stelle

13.10 .... **Cauchyscher Verdichtungssatz**
(a_n) nichtnegative monoton fallende Folge.
$\Sigma\ a_n$ konvergent <=> „verdichtete Reihe" $\Sigma\ 2^n\ a_{2^n}$ konvergent
Beweis: =>: Glieder ausschreiben und in 1, 1, 2, 4, 8, ...-er-Gruppen zusammenfassen, durch das letzte Glied jeder Gruppe nach unten abschätzen
<=: Zusammenfassen, durch erstes Glied jeder Gruppe nach oben abschätzen

13.11 .... **Beispiele**
$\Sigma 1/n^\alpha$ für $\alpha>1$ konvergent, $\alpha\leq 1$ divergent.

13.12 .... **Definition „Umordnung"**
Umordnung einer Reihe: Indizes der Glieder durch Bijektion φ umordnen

13.13 .... **Beispiel**

13.14 .... **Kleiner Umordnungssatz**
Umordnung ändert an Konvergenz und Wert einer absolut konvergenten Reihe nichts.
Beweis: Spezialfall $a_k \geq 0$. $\Sigma_{k=1}{}^p a_{\varphi(k)} \leq \Sigma_{k=1}{}^{m(p)} a_k \leq \Sigma_{k=1}{}^{\infty} a_k$, da $\{\varphi(1), ..., \varphi(p)\} \subset \{1,...,m(p)\}$
Monotoniekriterium => Konvergenz. Umgekehrt φ^{-1} Umordnung => Gleicher Wert
$a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|$, positiv. $\Sigma a_k = \Sigma(a_k+|a_k|) - \Sigma|a_k|$, konvergent nach Majorantenk. => Beh.

13.15 .... **Definition „Totale Umordnung"**
N in endlich viele oder abzählbar viele disjunkte Teilmengen $S_1, S_2, ...$ zerlegen.
Für abzählbar unendliche Teilmengen: Abzählung φ_j bestimmen.
$b_j := \{\ \Sigma_{k\in Sj} a_k$ [S_j endlich], $\Sigma_{k=1}{}^{\infty}\ a_{\varphi j(k)}$ [Sj unendlich], 0 [j>p = Anzahl der Teilmengen] }
$\Sigma_{j=1}{}^{\infty}\ b_j$ totale Umordnung von Σa_k
Schreibweise: Reihe absolut konvergent, S abzählbar unendlich.
=> $b = \Sigma_{k\in S}\ a_k$, b unabh. von spez. Wahl der Abzählung φ

13.16 .... **Großer Umordnungssatz**
Totale Umordnung ändert an Konvergenz und Wert einer absolut konvergenten Reihe nichts.
Ist $a_k\geq 0$ und Σa_k divergent, so auch jede Umordnung.
Beweis: Komplizierte ε-Abschätzungen

13.17 .... **Definition**
Doppelfolge: Abbildung c: $N_0 \times N_0$ $(i, j) \rightarrow c_{i,j}$
φ bijektive Abzählung z.B. nach Cauchyschem Diagonalverfahren.

13.18 .... **Satz**
$(c_{i,j})$ Doppelfolge.
$\exists$ Abzählung φ, $\Sigma c_{\varphi(n)}$ absolut konvergiert => $\forall$ Abzählungen abs. konv. mit gleichem Wert
Absolute Konvergenz d. Doppelreihe: $\exists$ Abzählung, $\Sigma c_{\varphi(n)}$ absolut konvergent
Wert der Doppelreihe: $\Sigma_{j,k=0}{}^{\infty}\ c_{j,k} := \Sigma_{n=0}{}^{\infty}\ c_{\varphi(n)}$
Doppelreihe abs. konvergent => $\Sigma_{j,k=0}{}^{\infty}\ c_{j,k} = \Sigma_{j=0}{}^{\infty}\ (\Sigma_{k=0}{}^{\infty}\ c_{j,k}) = \Sigma_{k=0}{}^{\infty}\ (\Sigma_{j=0}{}^{\infty}\ c_{j,k})$,
alle Reihen abs. konv., „Iterierte Reihen der Doppelfolge"
Beweis: (1) aus kleinem Umordnungssatz, (2) aus großem Umordnungssatz

13.19 .... **Cauchyscher Doppelreihensatz**
Doppelreihe absolut konvergent <=> $\Sigma_{j=0}{}^{\infty}\ (\Sigma_{k=0}{}^{\infty}\ |c_{j,k}|) < \infty$ <=> $\Sigma_{k=0}{}^{\infty}\ (\Sigma_{j=0}{}^{\infty}\ |c_{j,k}|) < \infty$
Beweis: Aus großem Umordnungssatz

13.20 .... **Satz**
Reihen Σa_j und Σb_j **abs.** konv. => $\Sigma a_j b_k = (\Sigma a_j)(\Sigma b_k)$ **abs.** konv.
Beweis: $\Sigma(\Sigma|a_j b_k|) = \Sigma(|a_j| \cdot \Sigma|b_k|) = (\Sigma|a_j|)(\Sigma|b_k|)$
nach 12.5 (Gliedweise multiplizierbar) und 13.19 (Cauchyscher Doppelreihensatz)
Ohne Beträge => Werte gleich.

13.21 .... **Cauchy-Produkt von Reihen**
Doppelfolge nach Diagonalen abzählen und klammern.
$\Sigma a_j b_k = \Sigma(\ \Sigma_{i=0}{}^{n}\ a_i\ b_{n-i}\ ) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + ...$

13.22 .... Beispiele

$(\Sigma q^k)^2 = 1/(1-q)^2 = \Sigma(n+1)q^n$

Iterierte Reihen nicht notwendig gleichen Wert, nur bei Beträgen (1 bzw. -1 in Nebendiag.)

CAUCHY-Produkt divergent, obwohl beide Reihen einzeln nach LEIBNIZ konvergieren.

$\Sigma_{j,k=2}^{\infty}\ 1/j^k = 1$

.... Lineare Struktur der Analysis

R^N = Vektorraum aller Folgen. Konvergente F. und Nullf. sind lin. Unterraum. lim ist lineare Abb.

Kapitel V: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

§14 .... Topologische Grundbegriffe

14.1 .... Definition

$U_\varepsilon(x):=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ε-Umgebung

$\mathring{U}_\varepsilon(x):= U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ punktierte ε-Umgebung

x innerer Punkt von A <=> $\exists\ \varepsilon>0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset A$

$A^\circ := \{ x \in R \mid x$ ist innerer Punkt von A $\}$, Inneres, Kern

A offene Menge <=> Jeder Punkt von A ist innerer Punkt <=> $A = A^\circ$

A abgeschlossene Menge <=> Komplement von A ($R \setminus A$) offene Menge

x Häufungspunkt von A <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \ \mathring{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ <=> $x \in H(A)$

$\bar{A} := A \cup H(A)$ Abgeschlossene Hülle von A

x Isolierter Punkt <=> $\exists\ \delta>0$ mit $U_\delta(x) \cap A = \{x\}$

14.2 .... Beispiele

Intervall (a, b) offene Menge, [a, b] abgeschlossene Menge

$\{ 1/n \}$. $A^\circ=\emptyset$, $H(A)=\{0\}$, A weder offen noch abgeschlossen, jeder Punkt isolierter Punkt

$H(Q)=R$

14.3 .... Satz

A abgeschlossen <=> $H(A) \subset A$ <=> $\bar{A} = A$

Beweis: (1) A abg. => $R\setminus A$ offen => $x \in R\setminus A$, $U_\varepsilon(x) \subset R\setminus A$ => $U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. => $x \notin H(A)$

(2) $H(A) \subset A$ => $\bar{A} = A \cup H(A) = A$

(3) $\bar{A} = A$, $x \in R\setminus A$ => $x \notin \bar{A} = A \cup H(A)$ => $x \notin A$, $x \notin H(A)$ => $\exists\ \varepsilon$, $U_\varepsilon(x) \cap A=\emptyset$

14.4 .... Satz

$x \in H(A)$ => $\exists$ Folge (x_n) mit $x_n \in A\setminus\{x\}$, $\lim x_n = x$

Beweis: Induktion zur Konstruktion von (x_n). Zu $\varepsilon=1\ \exists\ x_1 \in \mathring{U}_\varepsilon(x) \cap A$.

Induktion, dabei $\varepsilon:=\min\{ 1/n, |x-x_1|, |x-x_2| \ldots \}$. $x_n \in \mathring{U}_\varepsilon(x) \cap A$. => x_j paarweise verschieden, $\lim x_n = x$, da $|x_n-x|<1/n$.

.... Bemerkung

=> In jeder ε-Umgebung eines Häufungspunktes unendlich viele Elemente von A

14.5 .... Satz „Bolzano-Weierstrass"

Jede unendliche beschränkte Teilmenge A von R besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis: A unendlich => $\exists$ injektive Abbildung φ: $N \to A$. $\varphi(n)=:x_n$. (x_n) beschränkt

=> Bolzano-Weierstrass => (x_n) mindestens einen Häufungswert => $x_n \in U_\varepsilon(x)\ \forall\ n>n_0$

14.6 .... Satz

Abgeschlossene Menge nach oben/unten beschränkt => besitzt Maximum/Minimum

[Supremum/Infimum liegt aufgrund d. Abgeschlossenheit in Menge]

Beweis: Abgeschlossen => $\exists$ s:=supA. Ann.: $s \notin A$ => $\exists$ streng monoton wachsende Folge gegen Supremum, $(x_n) \in A$, $\lim x_n = s$. => $s \in H(A) \subset \bar{A} = A$ => Widerspruch

§15 .... Grenzwerte von Funktionen

15.1 .... Definition

f: $S \to R$, $\mathbf{x_0 \in H(S)}$, $S \neq \emptyset$

f an Stelle x_0 Grenzwert <=> $\mathbf{\exists\ L \in R,\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ |f(x)-L|<\varepsilon\ \forall\ x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap S}$

Schreibweise: $\lim_{x \to x0} f(x)=L$, $f(x) \to L$ für $x \to x_0$

.... **Bemerkungen**
Grenzwert, falls existiert, eindeutig bestimmt. Indirekt: Zwei L annehmen, mit ε/2 abschätzen.
Bleibt unberücksichtigt, ob und wie f an der Stelle x_0 definiert

15.2 .... **Satz**
$T \subset S \subset R$. $x_0 \in H(T)$. $\exists \lim_{x\to x0,\, x\in S} f(x)$ => $\exists \lim_{x\to x0,\, x\in T} f(x)$ und beide gleich.
Beweis: Folgt unmittelbar aus Definition des Grenzwertes

15.3 .... **Definition**
Rechts-/Linksseitiger Grenzwert

15.4 .... **Satz „Folgenkriterium"**
f an Stelle x_0 Grenzwert <=> Für **jede** gegen x_0 konvergente Folge (x_n), $x_n \in S\backslash\{x_0\}$, ist auch $(f(x_n))$ konvergent
lim f(x) = L => für jede Folge $x_n \to x_0$ gilt $\lim f(x_n) = L$
Beweis: Lang.

15.5 .... **Konvergenzkriterium von Cauchy**
$\exists \lim f(x) \iff \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(\varepsilon),\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\ \ \forall\, x,y \in {}^{\circ}U_\delta(x_0) \cap S$
Beweis: =>: $|f(z)-L| < \varepsilon/2$. => $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-L| + |L-f(y)| < \varepsilon$
<=: Bel. Folge (x_n), $x_n \in S\backslash\{x_0\}$, $\lim x_n = x_0$. => bel. ε => δ aus Konvergenz der Folge => $(f(x_n))$ Cauchy-Folge => Folgenkriterium

15.6 .... **Satz**
Linearität von „lim": lim(f+g)(x), lim(f·g)(x), lim(αf)(x), lim(1/f)(x), Ordnungserhaltung

.... **Beispiele**
Für jedes Polynom p und jede rationale Funktion r=p/q gilt: $\lim p(x)=p(x_0)$, $\lim r(x)=r(x_0)$

15.7 .... **Definition**
f für $x\to\infty$ <=> $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, x_0=x_0(\varepsilon)\ |f(x)-L|<\varepsilon\ \ \forall\, x\ge x_0,\ x\in S$

15.8 .... **Bemerkungen**
Grenzwert eindeutig bestimmt
Folgenkriterium und Cauchy gelten auch:
$\exists \lim_{x\to\infty} f(x)$ <=> Für jede Folge (x_n), die bestimmt gegen ∞ divergiert, ist die Folge $(f(x_n))$ konvergent <=> $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, x_0,\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\ \ \forall x,y\ge x_0,\ x,y\in S$
Grenzwertregeln weiter gültig.

15.9 .... **Definition**
f divergiert bestimmt gegen ∞ für $x\to x_0$ <=> $\forall\, G>0\ \exists\, \delta=\delta(G)>0,\ f(x)\ge G\ \ \forall\, x\in {}^{\circ}U_\delta(x_0) \cap S$
f divergiert bestimmt gegen ∞ für $x\to\infty$ <=> $\forall\, G>0\ \exists\, x_0\ \ f(x)\ge G\ \ \forall x\ge x_0$

§16 .... Stetige Funktionen

16.1 .... **Definition**
f stetig im Punkt x_0 <=> $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \ \forall\, x\in U_\delta(x_0) \cap S$
f stetig auf S <=> f in jedem Punkt aus S stetig.
Beachte: f in jedem isolierten Punkt stetig.

16.2 .... **Beispiele**

16.3 .... **Folgenkriterium für Stetigkeit**
f stetig im Punk x_0 <=> für jedegegen x_0 konvergente Folge (x_n), $x_n\in S$, gilt:$\lim f(x_n)=f(x_0)$

16.4 .... **Satz**
αf, f+g, f·g, [f/g bei $g(x_0)\neq 0$] stetig.

16.5 .... Satz

g o f stetig bei entsprechender einzelner Stetigkeit in x_0 und $f(x_0)$.
Beweis: Über Folgenkriterium

16.6 .... Beispiele

16.7 .... Satz

f in x_0 stetig. $f(x_0)>0 \Rightarrow \exists\, \delta>0$ mit $f(x)>0 \;\; \forall x\in U_\delta(x_0) \cap S$, Analog für „<“
Beweis: $\varepsilon:=|f(x_0)|/2. \Rightarrow \delta \Rightarrow f(x) = f(x_0) + (f(x)-f(x_0)) \geq f(x_0) - |f(x)-f(x_0)| > f(x_0)/2 > 0$

16.8 .... Definition

f rechtsseitig stetig im Punt $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x0+} f(x) = f(x_0)$
f linksseitig stetig im Punt $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x0-} f(x) = f(x_0)$
Beachte: f stetig <=> rechts- und linksseitig stetig.
Sprungstelle von f <=> rechts- und linksseitiger Grenzwert existent, aber ungleich

16.9 .... Zwischenwertsatz

f auf [a,b] stetig.
(a) f auf [a,b] beschränkt
(b) M:=sup und m:=inf werden auf [a,b] angenommen
(c) $f([a,b]) = [m,M]$
Beweis: **(a)** Indirekt. $\forall\, n \;\exists\, x_n\in[a,b], |f(x_n)|>n$. Folge Beschränkt => BOLZANO-WEIERSTRASS => konvergente Teilfolge (x_{nk}) mit $\lim x_{nk} =: x_0 \in [a,b]$. => $|f(x_{nk})|$ konvergent => K, $|f(x_{nk})|<K$ => $n_k < |f(x_{nk})| \leq K \;\forall\, k$ => (n_k) beschränkt => Widerspruch.
(b) Ann.: $M\notin[a,b]$. => $f(x)<M$. $g:=1/(M-f(x))$ stetig, nach (a) beschränkt. => $1/(M-f(x))\leq K$ => $f(x)\leq M-1/K$ im Widerspruch zur Def. des Suppremums.
(c) ---

16.10 .... Bemerkungen

Stetiges Bild eines Intervalles wieder Intervall.

16.11 .... Folgerung

$f(a)\cdot f(b)<0$ (Vorzeichen verschieden!) => $\exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0)=0$.

16.12 .... Satz „Stetigkeit der Umkehrfunktion“

f auf Intervall streng monoton wachsend/fallend. Dann ist Umkehrabbildung auf entsprechendem Definitionsbereich stetig.
Beachte: f selbst nicht notwendig stetig! Neuer Def-Bereich nicht notwendig Intervall!
Beweis: ---

16.13 .... Beispiel

16.14 .... Satz

f auf Intervall injektiv und stetig => f streng monoton
Beweis: ---

16.15 .... Definition

$C[a,b]$ = Menge aller stetigen Funktionen $f:[a,b]\to R$.
Vektorraum

Kapitel VI. Funktionenfolgen und -reihen

§17 .... Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

17.1 .... Definition

$n \to f_n$ Funktionenfolge. (f_n).
Funktionenfolge punktweise konvergent gegen Grenzfunktion f <=> für jedes x konvergiert Zahlenfolge $(f_n(x))$ gegen Grenzwert f(x). <=> $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ <=>
$\forall\, \varepsilon>0, \forall\, x\ \exists\, n_0=n_0(\varepsilon,x)$ mit $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall n>n_0$
Grenzfunktion f eindeutig bestimmt.

17.2 .... Satz von CAUCHY

$f_n \to f$ <=> $\forall \varepsilon>0\ \forall x\ \exists n_0=n_0(\varepsilon,x),\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\ \ \forall\, n,m \geq n_0$ CAUCHYsche Konvergenzbed.
Beweis: Für festes x direkt aus 9.7, CAUCHY-Bedingung für Folgen.

17.3 .... Beispiele

Beachte: Punktweiser limes erhält Stetigkeit nicht unbedingt!

17.4 .... Definition

Funktionenfolge gleichmäßig konvergent <=> $\forall\, \varepsilon>0, \forall\, x\ \exists\, n_0=n_0(\varepsilon)$ mit $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall n>n_0$
Beachte: n_0 unabhängig von x! ε-Schlauch. Glm-Konv. => Punktw. Konv.

17.5 .... Beispiele

x^n nicht glm., nur punktweise konvergent.

17.6 .... Satz

Funktionenfolge stetiger Fkt. glm. konvergent gegen f auf S => f stetig auf S
Beweis: (i) glm. Konv. => $|f(x)-f_{n0}(x)|<\varepsilon/3$. (ii) f_{n0} stetig => $|f_{n0}(x)-f_{n0}(x_0)|<\varepsilon/3$
=> $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_{n0}(x)| + |f_{n0}(x)-f_{n0}(x_0)| + |f_{n0}(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon$

17.7 .... Bemerkungen

Punktweise: $\lim |f_n(x)-f(x)|=0$.
Gleichmäßig: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} |f_n(x)-f(x)|=0$
Beweis: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall n>n0, \forall x\in S.$ => $0\leq \sup |f_n(x)-f(x)| = a_n < \varepsilon\ \ \forall n>n_0$. => $a_n \to 0$

17.8 .... Definition

$\|f\| := \sup_{x\in S}|f(x)|$ Supremumsnorm (kurz: Norm) von f auf S.
Beachte: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} |f_n(x)-f(x)|=0$ <=> $\lim \|f_n-f\| =0$

17.9 .... Satz „Norm-Gesetze“

(1) $\|f\|\geq 0$, $\|f\|=0$ <=> $f=0$
(2) $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$
(3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Dreiecksungleichung)
(4) $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$
(5) $|\ \|f\| - \|g\|\ | \leq \|f-g\| \leq \|f+g\|$
Beweis: (1), (2) klar. (3), (4) über $|f(x)|\leq\|f(x)\|$, ... (5) aus (3) wie 2.12.

17.10 .... Satz

Funktionenfolge konv. glm. gegen f <=> $\lim \|f_n-f\| =0$
Beweis: =>: Siehe 17.7
<=: $\|f_n-f\|\to 0, \varepsilon>0.$ => $\exists\, n_0$: $\|f_n-f\|<\varepsilon\ \forall\, n>n_0$. => $|f_n(x)-f(x)| \leq \|f_n-f\| < \varepsilon\ \ \forall\, x \in S$

17.11 .... Bemerkungen

(f_n) konv. nicht glm. gegen f <=> $(\|f_n-f\|)$ keine Nullfolge <=> $\exists\, \varepsilon_0>0, \|f_n-f\| > \varepsilon_0\ \ \forall\, n>n_0$
<=> $\exists\, \varepsilon_0>0, |f_n(x)-f(x_n)| > \varepsilon_0\ \forall\, n>n_0,\ x_n \in S$ (unendlich viele Paare n, x_n)
f beschränkt auf S, so auch fast alle f_n.

17.12 .... Satz „Cauchy-Konvergenzbedingung bzgl. der Norm"

$\exists$ f mit $\lim f_n = f$ **glm.** <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$, $\|f_m-f_n\|<\varepsilon\ \forall\ m,n \geq n_0$.
Beweis: =>: $\|f_n-f\|<\varepsilon/2$. => $\|f_n-f_m\| \leq \|f_n-f\| + \|f-f_m\| < \varepsilon$
<=: Sei (f_n) Cauchy-Folge bzgl. d. Norm. => $(f_n(x))$ CF $\forall$ x => $\exists \lim f_n(x) =: f(x)$.
$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n-f_m\| < \varepsilon$. $m\to\infty$ => $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$. => $\sup |f_n(x)-f(x)| = \|f_n-f\| \leq \varepsilon$

17.13 .... Anwendung auf C[a,b]

$f \in C[a,b]$ => beschränkt => $\|f\|=\sup|f(x)|=\max|f(x)|$
$f_n \in C[a,b]$, (f_n) CF bzgl. Norm => $\exists\ f \in C[a,b]$ mit $\lim f_n = f$

17.14 .... Definition

Funktionenreihe: Funktionenfolge (s_n) mit $s_n=\Sigma_{k=1}^{n} f_k$. Bezeichnung: $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k$
Funktionenreihe glm. / punktweise konvergent <=> Funktionenfolge (s_n) glm. / pw. konv.

17.15 .... Satz

Reihe stetiger Fkt. konv **glm.** gegen stetige Grenzfunktion
Beweis: Bereits für Folgen bewiesen.

17.16 .... Satz „Cauchy-Konvergenzbedingung bzgl. der Norm"

$\exists$ Grenzfunktion m. **gleichm.** konv. <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$, $\|\ \Sigma_{k=n+1}^{n+p} f_k\| < \varepsilon\ \forall\ p\ \forall\ n > n_0$
Beweis: Bereits für Folgen bewiesen.

17.17 .... Majorantenkriterium von Weierstrass

$\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k$. $\|f_n\|\leq c_n$ für fast alle n und $\Sigma_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent => $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig
Beweis: $\|\ \Sigma_{k=n+1}^{n+p} f_k\| \leq\ \Sigma_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|\ \leq\ \Sigma_{k=n+1}^{n+p} c_k$, letztere erfüllt Cauchy => glm. Konv.

§18 .... Potenzreihen

18.1 .... Definiton

$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ Potenzreihe mit Entwicklungsstelle x_0. Koeffizientenfolge (a_n).

18.2 .... Beispiele

$\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ für $|x|<1$, $x_0=0$.
$\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$, $x \in R$ (siehe GÜ)

.... Herleitung des Konvergenzradius

Wurzelkriterium: $\limsup \sqrt[n]{|a_n\ (x-x_0)^n\ |}$ <1 Konvergenz, >1 Divergenz
=> Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ entweder unbeschränkt (Divergenz) oder beschränkt, dann β Grenzwert.
$\beta=0$ => Konvergenz $\forall$ x. $\beta>0$ Konvergenz für $|x-x_0|<1/\beta$, Divergenz für $|x-x_0|>1/\beta$

18.3 .... Satz

$r:=1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ Konvergenzradius ($1/\infty := 0$, $1/0 := \infty$)
$K:=\{\ |x-x_0| < r\ \}$ Konvergenzintervall der Potenzreihe.
Auf dem Intervall stellt die Potenzreihe eine Funktion dar.
Am Rande des Konvergenzintervalles keine Aussage möglich.

18.4 .... Beispiele

$\Sigma_{n=1}^{\infty} x^n/n^p$. $\limsup \sqrt[n]{1/n^p} = \lim 1 / (\sqrt[n]{n})^p = 1$ => r=1
p=0: Divergenz für x=-1, x=1
p=1: Konvergenz für x=-1, Divergenz für x=1
p≥2: Konvergenz für x=-1, x=1

18.5 .... Bemerkung

Aus Quotientenkriterium folgt:
Falls $\lim_{n\to\infty} |\ a_{n+1} / a_n\ |$ =: α existiert => $\alpha=\beta$, $1/\alpha$ auch Konvergenzradius

18.6 .... Satz

(a) $[a,b] \subset (-r\ r)$ => Potenzreihe auf [a,b] **gleichmäßig** konvergent

(b) $f:= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f: (-r,r) \to R$ => f stetig

Beweis: **(a)** $c:=\max\{ |a|, |b| \}$. $\|f_n\|:=\sup_{x\in[a,b]}|a_n x^n| \le |a_n| c^n$, $\Sigma_{n=0}^{\infty} |a_n| c^n$ konvergent, da c im Konvergenzradius. => Majorante 17.17 => $\Sigma_{n=0}^{\infty} f_n$ konv. glm.

(b) $x \in (-r,r)$. Intervall [a,b] umfaßt x => glm. Konvergenz von stetigen Fkt. => Grenzfunktion stetig (17.15) => f stetig in x => f stetig auf (-r,r)

18.7 .... ABELscher Grenzwertsatz

Potenzreige in (-r,r] / [-r,r) konvergent gegen f. => f im Punkt r / -r links-/rechtsseitig stetig

Beweis: oBdA r=1, ---

18.8 .... Satz

f, g auf jeweiligem Konvergenzintervall durch Potenzreihe dargestellt.

=> f+g, f-g, fg auf dem gemeinsamen Intervall ebenfalls durch Potenzreihe darstellbar

Beweis: 12.5 (Konvergente Reihen gliedweise addierbar), 13.21 (CAUCHY-Produkt v. Reihen)

18.9 .... Anwendung auf das CAUCHY-Produkt

Σa_k und Σb_k konvergent. Ist Cauchy-Produkt Σc_k mit $c_k:=\Sigma_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ ebenfalls konvergent

=> $(\Sigma a_k)(\Sigma b_k) = \Sigma c_k$. ***Absolute Konvergenz nicht mehr nötig (vgl. 13.20), dafür Σc_k!***

Beweis: Potenzreihen $\Sigma a_k x^k$ und $\Sigma b_k x^k$ konvergieren glm. auf [0,1] gegen stetige Fkt. =>

Sei $x \in (0,1)$ => 18.8, linearität => $(\Sigma a_k x^k)(\Sigma b_k x^k) = \Sigma c_k x^k$ => $x \to 1-$ (ABELSCHer Gws).

18.10 .... Identitätssatz für Potenzreihen -- Koeffizientenvergleich

Zwei Potenzreihendarstellungen von f und g auf gemeinsamem Konvergenzintervall.

(x_n) Folge, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$. $f(x_n)=g(x_n)\ \forall n$ => $f(x)=g(x)\ \forall x$ => $a_k=b_k$

Beweis: Induktion: f, g stetig. $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = \lim_{x\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$ => $a_0=b_0$.

Annahme: Koeffizienten 0,...,k gleich.

Schluß: $f_1(x):=a_{k+1} + a_{k+2}(x-x_0) + \ldots = (f(x) - \Sigma_{i=0}^{k} a_i(x-x_0)^i) / (x-x_0)^{k+1}$. Dito g_1. Ann => $f_1=g_1$.

f_1, g_1 stetig: $a_{k+1}=\lim f_1(x_n)= f_1(x_0) = g_1(x_0) = b_{k+1}$

18.11 .... Satz

f auf Intervall durch Potenzreihe dargestellt. => 1/f in δ-Umgebung als Potenzreihe darstellbar

Beweis: ---

18.12 .... Beispiel „Division von Potenzreihen“

$f(x)/g(x) = (\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k) / (\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k) = \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, c_k unbekannte Koeffizienten.

=> $(\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k) = (\Sigma_{k=0}^{\infty} b_k x^k)\ (\Sigma_{k=0}^{\infty} c_k x^k) = \Sigma_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0) x^n$.

Koeffizientenvergleich.

§19 .... Konvergenz im Körper der komplexen Zahlen

.... Allgemeines

Betrag: $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Keine Anordnung möglich ($i^2+1^2=0$)

Eigenschaften des Betrages gelten weiter

19.1 .... Definition

ε-Umgebung über Betragsdifferenz.

Übertragung d. Konvergenz, des ε-Kriteriums, der CAUCHY-Folge

19.2 .... **Satz**

(a) Folge (z_n) konvergiert <=> Reelle Folgen (Re z_n) und (Im z_n) konvergieren
(b) (z_n) CAUCHY-Folge <=> (Re z_n) und (Im z_n) CAUCHY-Folgen
(c) (z_n) konvergiert <=> (z_n) ist CAUCHY-Folge
Beweis: (a) =>: $|x_n-x_0| = |\mathrm{Re}(z_n-z_0)| \le |z_n-z_0| < \varepsilon$, ...
<=: $|z_n-z_0|=|(x_n-x_0) + i\,(y_n-y_0)| \le |x_n-x_0| + |i|\,|y_n-y_0| < \varepsilon$
(b) analog, (c) aus (a) und (b) mit CAUCHY.

19.3 .... **Folgerung**

Konjugierte Folge hat gleiches Konvergenzverhalten

19.4 .... **Bemerkung**

8.4 gilt weiter (Linearität des Grenzwertprozesses)

19.5 .... **Definition**

Reihen in C wie in R. Absolute Konvergenz bei Betrags-Konvergenz

19.6 .... **Satz**

Absolut konvergente Reihe in C erst recht konvergent.

19.7 .... **Satz**

Es gelten in C
Majoranten-Kriterium (13.4)
Wurzelkriterium (13.5)
Quotientenkriterium (13.6)

19.8 .... **Satz**

Es gelten (Zerlegung in Re und Im beim Beweis!)
Kleiner, großer Umordnungssatz
CAUCHYscher Doppelreihensatz
CAUCHY-Produkt absolut konvergenter Reihen

19.9 .... **Beispiele und Definition**

Exponentialrechung in C.
e^z durch Reihenentwicklung
e^{z1+z2} durch CAUCHY-Produkt von Reihen (Diagonalverfahren, Binominalkoeffs)
$e^z=e^x$ (Re e^{iy} + i Im e^{iy}). Beweis: $e^x\,(1 + iy/1 - y^2/2! - iy^3/3! + ...) = e^x(\Sigma\ + i\Sigma)$

19.10 .... **Definition**

$\cos x := \mathrm{Re}\, e^{ix} = \Sigma_{k=0}^{\infty}\, (-1)^k\, x^{2k}/(2k)! = 1 - x^2/2! + x^4/4! - ...$
$\sin x := \mathrm{Im}\, e^{ix} = \Sigma_{k=0}^{\infty}\, (-1)^k\, x^{2k+1}/(2k+1)! = x - x^3/3! + x^5/5! - ...$
=> EULERsche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2$

19.11 .... **Satz und Definition, „Additionstheoreme“**

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\lim_{x\to 0} \sin x / x = 1$, $\lim_{x\to 0} (\cos x - 1) / x^2 = -1/2$
$\pi/2 := \min \{ \cos x = 0 \}$
$e^{2\pi i} = 1$

19.14 .... **Definition**

$\tan x = \sin x / \cos x$, $\cot x = \cos x / \sin x$

19.15 .... **Satz und Definition**

Monotonie der trig. Funktionen auf gewissen Intervallen

19.16 .... **Satz und Definition**

$z = r\, e^{i\varphi}$ für alle komplexen Zahlen möglich

19.17 .... **Satz und Definition**

Lösungen von $z^n=1$, n-te Einheitswurzeln: $\zeta_k = e^{\,i2\pi k/n}$
$z^n=c$ => Eine Lösung w => $\zeta_0 w$, $\zeta_1 w$, ... sämtliche Lösungen

.... **Beachte**
Multiplikation in C: Drehstreckung

19.18 .... **Definition**
$\cosh x := (e^x+e^{-x})/2$, $\sinh x := (e^x-e^{-x})/2$
$\cosh x + \sinh x = ex$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cosh(x+y)=\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$\sinh(x+y)= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Kapitel VII. Differenzierbare Funktionen

§20 .... Differenzierbarkeit

20.1 .... Definition

Menge in sich dicht <=> Jeder Punkt ist Häufungspunkt

f diffbar im Punkt x <=> $\exists$ GW $\lim_{x\to x0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = \lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h =: f'(x_0)$

<=> $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ |(f(x)-f(x_0))/(x-x_0) - f'(x_0)| < \varepsilon$

<=> Für jede Folge $x_n \to x_0$ gilt: $(f(x_n)-f(x_0))/(x_n-x_0) \to f'(x_0)$

f in jedem Punkt diffbar => f ' Ableitung auf ganz S

20.2 .... Satz

f diffbar in Punkt => f stetig in Punkt

Beweis: $f(x)-f(x_0) = (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) \cdot (x-x_0) \to f'(x_0)\, 0 = 0$

20.3 .... Bemerkungen

Inkrement $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\, h + r(h)$

=> $(f(x_0+h)-f(x_0)) / h = f'(x_0) + r(h)/h.$ => $r(h)/h \to 0.$

20.4 .... Satz

f in x_0 diffbar <=> $\exists$ L mit $f(x_0+h)-f(x_0) = L\,h + r(h)$, $r(h)/h \to 0.$

20.5 .... Bemerkung

Bei Stetigkeit $r(h)\to 0$, hier $r(h)/h\to 0$

20.6 .... Satz

$(\alpha f)' = \alpha f'$

$(f+g)' = f' + g'$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$(f/g)' = (f'g - fg') / g^2$

Beweis: Produktregel:

$1/h\, (f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)) = 1/h\, (f(x_0+h)[g(x_0+h)-g(x_0)] + [f(x_0+h)-f(x_0)]g(x_0)) = \ldots$

Quotientenregel: Spezialfall 1/g. Auf δ-Umgebung $\neq 0$. Wie oben.

20.7 .... Kettenregel

f: $T\to R$, g: $S\to R$. $g(S)\subset T$. g in x_0 diffbar und f in $y_0 = g(x_0)$ diffbar =>

f o g diffbar mit $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$

Beweis: Inkrement für f aufstellen. $\varphi(y) := \{\, r(y-y_0) / (y-y_0)$ bzw. $0\}$, stetig in y_0, da $r(h)/h\to 0$

g diffbar in x_0 => g stetig in x_0 => $\varphi(g(x))\to 0$.

$f(y)-f(y_0) = (f'(y_0) + \varphi(y)) (y-y_0)$ => $(f(g(x)) - f(g(x_0))) / (x-x_0) =$

$(f'(g(x_0)) + \varphi(g(x))) (g(x)-g(x_0))/(x-x_0) \to f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

20.8 .... Satz „Ableitung der Umkehrfunktion“

f auf Intervall streng monoton, in x_0 diffbar mit $f'(x_0)\neq 0$.

=> f^{-1}: $f(I)\to R$ diffbar in $y_0 := f(x_0)$, $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$

Beachte: $g=f^{-1}$ => $g'(y_0) = 1 / f'(g(y_0))$

Beweis: $x:=f^{-1}(y)$. => $(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) / (y-y_0) = (x-x_0)/(f(x)-f(x_0))$. f^{-1} stetig: $y\to y_0$ => $x\to x_0$.

Beispiele: $\log x$, x^α, $(\ln f(x))' = f'(x) / f(x)$ logarithmische Ableitung

20.9 .... Definition

Rechts- / Linksseitige Diffbarkeit.

20.10 .... Bemerkung

LEIBNIZ-Schreibweise

§21 .... Mittelwertsatz der Differentialrechnung

21.1 .... Definition

Absolutes Maxiumum/Minimum von f <=> $f(x_0) \geq / \leq f(x)\ \forall\ x \in S$
Lokales Maxiumum/Minimum von f <=> $\exists\ \delta>0\ \ f(x_0) \geq / \leq f(x)\ \forall\ x \in U_\delta(x_0) \cap S$
Lokales Extremum <=> Lokales Maxiumum/Minimum
Lokale Extrema nur in Häufungspunkten sinnvoll.

21.2 .... Satz

f lokales Extremum in x_0 und dort diffbar => $f'(x_0) = 0$
Beweis: Differenzenquotienten für links- und rechtsseitige Annäherung aufstellen

21.3 .... Satz von ROLLE

$f: [a,b] \to R$ stetig, auf (a,b) diffbar, f(a)=f(b)=0. => $\exists\ \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)=0$
Beweis: Stetige Fkt. auf kompakter Menge => $\exists$ absolutes Extremum => $f'(\xi)= 0$
Beachte: Notwendig: 16.9 (Max/Min auf kompakter Menge), BOLZANO-WEIERSTRASS, Monotonieprinzip, Vollständigkeitsaxiom

21.4 .... Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$f: [a,b] \to R$ stetig, auf (a,b) diffbar. => $\exists\ \xi \in (a,b)$, $(f(b)-f(a))/(b-a) = f'(\xi)$
Beweis: $h(x):= f(x) - f(a) - ((f(b)-f(a))/(b-a) \cdot (x-a)$. => Rolle: $\exists\ \xi$ mit $h'(\xi)=0$

21.5 .... Bemerkungen zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Andere Formulierungen:
$\exists\ \xi$ mit $f(b)-f(a) = (b-a)\ f'(\xi)$, $f(b) = f(a) + (b-a)\ f'(\xi)$
$\exists\ \delta \in (0,1)$ mit $(f(b)-f(a))/(b-a) = f'(a+\delta(b-a))$
I Intervall $[x_0, x_0+h]$. $\exists\ \delta \in (0,1)$ mit $f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \delta h)$

21.6 .... Satz (aus MWS)

(1) $f'(x)=0\ \forall\ x$ => f = const.
(2) $f'(x)>0\ \forall\ x$ => f streng monoton wachsend
...
Beweis: $x_1<x_2$. => $\exists\ \xi$ mit $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)\ (x_2-x_1)$

21.7 .... Satz

$f'(x_0)=0$.
(a) f bei x_0 lokales Maximum/Minimum <=> $\exists\ \delta$, $f'(x)>0$ für $x_0-\delta<x<x_0$, $f'(x)<0$ für $x_0-\delta<x<x_0$
(b) $\exists\ f''(x_0)$ und <0 => Maximum, >0 => Minimum
Beweis: (a) MWS $f(x_0+h) = f(x_0) + h\ f'(\xi)$
(b) Differenzenquotient für f ''.

21.8 .... Verallgemeinerter Mittelwertsatz

f, g: $[a,b] \to R$ stetig, diffbar auf (a,b). => $\exists\ \xi \in (a,b)$, $[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi)$
=> wenn $\mathbf{g'(x) \neq 0\ \forall\ x}$: $(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)) = f'(\xi) / g'(\xi)$
Beachte: g(x)=x liefert den bekannten MWS.
Beweis: $\varphi(x):=[f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$. => $\varphi(a)=\varphi(b)=f(b)g(a)-f(a)g(b)$.
MWS: $\exists\ \xi$ mit $\varphi'(\xi)=0$ => Beh.
$g'(x)\neq 0$ => MWS: $g(a)\neq g(b)$.

21.9 .... Regel von L'HOSPITAL

f, g: $(a,b) \to R$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0\ \forall\ x$.
(A1) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$
(A2) $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$
Gilt (A1) oder (A2) und $\exists\ L:=\lim_{x\to a+} (f'(x) / g'(x))$ => $\exists \lim_{x\to a+} f(x)/g(x) = L$
Motivation: $\lim_{x\to a} f(x) =0$, $\lim_{x\to a} g(x) =0$, f,g stetig in a => f(a)=g(a)=0.
=> $f(x)/g(x) = (f(x)-f(a))/(g(x)-g(a))$ = (Erweitern mit $1/(x-a)$, $x\to a$) = $f'(a)/g'(a)$
Beweis: ---

21.10 .... Beispiele

21.11 .... Satz und Definition
Hyperbolische Funktionen, deren Umkehrfunktionen und Ableitungen

§22 .... *Differentiation von Funktionenfolgen*

22.1 .... Beispiel
$\sin(n^2x) / n \to 0$ glm., da $\|f_n\| \leq 1/n$. $f_n' = n \cos(n^2x)$ divergent!

22.2 .... Gliedweise Differentiation von Funktionenfolgen
Beschränktes Intervall, f_n diffbar, $\exists\, x_0$, $(f_n(x_0))$ konvergent. (f_n') glm. konvergent => (f_n) glm. konvergent, $f_n \to f$ mit f diffbar, $f_n' \to f'$ glm.

Die Folge (f_n) darf gliedweise differenziert werden.

Aus punktweiser Konvergenz in einem Punkt wird gleichmäßige Konvergenz auf I, wenn nur die gediffte Funktionenfolge glm. konv.
Beweis: ---

22.3 .... Gliedweise Differentiation von Funktionenreihen
Beschränktes Intervall, f_n diffbar, $\exists\, x_0$, $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ konvergent. $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k'(x_0)$ glm. konvergent
=> $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ glm. konvergent und $f'(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

22.4 .... Satz
Potenzreihe innerhalb des Konvergenzradius wie üblich gliedweise diffbar, Radius bleibt gleich!
Beweis: Nur Radius zu zeigen. $\limsup \sqrt[n]{n \cdot |a_n|} = \lim \sqrt[n]{n}\, \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

22.5 .... Definition
Stammfunktion F: $F'(x) = f(x)\ \forall\, x$, unterscheiden sich nur um additive Konstante!

22.6 .... Satz
Stammfunktion einer Potenzreihe im Konvergenzradius wie üblich gliedweise.

.... Beispiel
Logarithmusreihe: $\ln(1+x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1) \cdot x^{k+1} = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$, $-1<x\leq 1$
<=: $d/dx \ln(1+x) = 1/(1+x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$. Geometrische Reihe
Ebenso $\ln(1-x)$, $\ln((1+x)/(1-x))$

§23 .... *Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor*

23.1 .... Definition
Höhere Ableitungen rekursiv definiert
n-mal diffbar: Die ersten 0,..., n Ableitungen existieren

23.2 .... Satz
Potenzreihe beliebig oft diffbar auf Konvergenzintervall

23.3 .... Definition
$T_n(x) := \Sigma_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)/k! \cdot (x-x_0)^k$ das n-te Taylor-Polynom an der Stelle x_0.

23.4 .... Satz von Taylor
f n-mal stetig diffbar und (n+1) mal diffbar auf Innerem eines Intervalles.
=> $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.
(a) $\exists\, \xi \in I^\circ$, $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x-x_0)^{n+1}$ — Restglied nach Lagrange
(b) $\exists\, \eta \in I^\circ$, $R_n(x) = f^{(n+1)}(\eta)/n! \cdot (x-x_0)\,(x-\eta)^{n+1}$ — Restglied nach Cauchy
Beachte: Für n=0 MWS 21.5. $R_n(x)$ gibt an, wie gut das Polynom die Funktion approximiert.
Beweis: ---

23.5 .... Beispiel
$f(x)=e^x$. $f^{(k)}(0)=1$. $T_3(x) = 1 + x + 1/2\, x^2 + 1/6\, x^3$. $R_{3,\text{Lagrange}}(x) = 1/24\, e^{\xi} x^4$ für $\xi \in (0,x)$.
x:=1/2. Abweichung 0,0053.

23.6 .... Definition
Ist $f \in C^\infty$, $T(x) := \Sigma_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0)/k! \cdot (x-x_0)^k$ Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0.

23.7 .... Bemerkungen
Konvergenzradius der TAYLOR-Reihe nicht notwendig >0. (Beispiel: $e^{(-1/x^2)}$ in 0)
Falls **konvergent**, so nicht notwendig gegen f.

23.8 .... Satz
Jede Potenzreihe ist in ihrem Konvergenzintervall die TAYLOR-Reihe von ihrer Funktion f an der Stelle x_0.

23.9 .... Satz
TAYLOR-Entwicklung $f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0)/k! \cdot (x-x_0)^k$ <=> $R_n(x) \to 0$ <= $\exists\ \alpha, C$ mit $|f^{(n)}(x)| \leq \alpha C^n$
Beweis: (1) klar. (2) $|R_{n,\text{LAGRANGE}}(x)| = |f(x)-T_n(x)| \leq \alpha\ C^{n+1}\ (x-x_0)^{n+1}/(n+1)! \to 0$, denn $a^n/n! \to 0$, da $\Sigma a^n/n! = e^a$.
Beachte: Ist f durch Potenzreihe dargestellt, so ist dies die TAYLOR-Entwicklung.

23.10 .... Satz
Ersten n-1 Ableitungen Null, n-te Ableitung $\neq 0$. n ungerade => f kein Extremum
n gerade, $f^{(n)}(x_0)<0$ => lokales Maximum. $f^{(n)}(x_0)>0$ => lokales Minimum.
Beweis: TAYLOR-Reihe, bleiben nur zwei Glieder.

§24 .... Erste Differentialgleichungen

24.1 .... Satz
Genau die Fkt. $u(t)=ce^{\alpha t}$ erfüllt die Gl. $u'(t)=\alpha u(t)$. c Integrationskonstante
Eindeutigkeit: Neue Fkt. v, u/v differenzieren =0. => Nur Faktor

24.2 .... Satz
Genau die Fkt. $u(t)=ce^{\alpha(t-t0)}$ erfüllt die Gl. $u'(t)=\alpha u(t)$ und die AWB $u(t_0)=u_0$.

24.3 .... Beispiel
Weltbevölkerung

24.4 .... Beispiel „Gestörte Exponentialprozesse“

24.5 .... Satz
$u_p(t)+ce^{\alpha t}$ erfüllt gestörte DGL, u_p partikuläre Lösung.

24.6 .... Beispiel
R-L-Reihenschaltung
Feder-Masse-Dämpfungssystem

Stichwortliste Analysis I

Vollständigkeitsaxiom	§3
Irrationale Zahlen dicht in R	$c := a + (b-a)/(k \cdot \sqrt{2})$. Irrational, da sonst $\sqrt{2}=(b-a)/k(c-a)$
Bernoullische Ungleichung	$(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$
Q dicht in R	$a < m/n < b \iff na < m < nb$. => $\exists$ n mit n(b-a)>1
Indentitätssatz für Polynome	6.3. Abdiv. von Linearfaktoren
$\sqrt[n]{n} \to 1$	$x_n := \sqrt[n]{n} -1$. => $n = (x_n-1)^n$. Binom-Koeffs von 0 und 2.
Vier Prinzipien der Konvergenztheorie	Monotonieprinzip Intervallschachtelung Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstrass Cauchysches Konvergenzkriterium
Reihen	Geometrische Reihe Teleskopsumme Majorante / Minorante Wurzelkriterium Quotientenkriterium Integralkriterium Dirichlet Leibniz
Geometrische Reihe	§12
Teleskopsumme	§12
$\Sigma_{k=1}^{\infty} 1/k$	$\varepsilon=1/2$, Cauchy, m:=2n. $1/(n+1) + 1/(n+2) + \ldots > n/2n$
$\Sigma_{k=1}^{\infty} 1/k^2$	$\leq 1 + \Sigma_{k=2}^{n} 1/k(k-1)$
Absolut konvergente Reihe erst recht konvergent	13.2
Majorante / Minorante	Cauchy abschätzen
Wurzelkriterium	Majorisieren durch geometrische Reihe
Quotientenkriterium	Ungleichungskette
Zwischenwertsatz	Stetige Funktion auf beschränktem Intervall beschränkt, sup / inf werden angenommen, Intervall auf Intervall
Norm-Gesetze	5 Stück, 17.9
Funktionenfolgen / -Reihen	Punktweise / Gleichmäßige Konvergenz, Cauchy, Weierstrass, Supremumsnorm
Funktionenfolge stetiger Fkt. glm. gegen f	=> f stetig. $\varepsilon/3$-Abschätzung
f-Folge: Cauchy	$\lvert f_n(x)-f_m(x)\rvert<\varepsilon$ Konvergenz $\lVert f_n-f_m\rVert<\varepsilon$ Glm. Konvergenz
f-Reihe: Cauchy	Glm. Konvergenz, $\lVert\Sigma\ \rVert<\varepsilon$
Majorantenkriterium von	Weierstrass. $\lVert f_n\rVert<c_n$, Σc_n konv. => Σf_k konv. glm.
Potenzreihen	Radius aus Wurzelkriterium herleiten Gleichm. Konv. auf enthaltenem kompakten Intervall Grenzfunktion stetig Abelscher Grenzwertsatz
Differenzierbarkeit	Inkrementbetrachtung Produkt/Quotientenregel Kettenregel Ableitung der Umkehrfunktion Rolle $f(a)=f(b)=0$, $f'(\xi)=0$ Mittelwertsatz aus Rolle. Verallgemeinerter MWS $(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$
Differentiation von Funktionenfolgen	Beschr. Interv., f_n diffb., $(f_n(x_0))$ konv., (f_n') glm. konv. => f_n konv. glm., gliedweise diffbar
Potenzreihe diffen	Gliedweise, Radius bleibt ($\sqrt[n]{n}\to 1$)
Taylor	f n-mal stetig diffbar, n+1-mal diffbar auf Innerem Restglieder!